Aufgabe 1

Lemma 1. *Seien X, Y wegzusammenhängende topologische Räume. Dann gilt*

$$\Pi_1(X \times Y) \simeq \Pi_1 X \times \Pi_1 Y$$

Beweis. Das Produkt kommt mit zwei stetigen Projektionen $p_1 : X \times Y \to X, p_2 : X \times Y \to Y$. Haben wir eine stetige Abbildung $f : Z \to X \times Y$, so bilden wir damit stetige Abbildungen $f_1 = p_1 \circ f : Z \to X$ und $f_2 = p_2 \circ f : Z \to Y$. Man erinnere: f ist stetig genau wenn sowohl f_1 als auch f_2 stetig sind.

Umgekehrt, haben wir stetige Abbildungen $f_1 : Z \to X$ und $f_2 : Z \to Y$, so können wir eine stetige Abbildung $f = (f_1, f_2) : Z \to X \times Y$ definieren, durch $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$, mit der Eigenschaft $f_1 = p_1 \circ f$ und $f_2 = p_2 \circ f$.

Nach diesen allgemeinen Überlegungen konstruieren wir die gesuchten Isomorphismen. Dazu wählen wir $x_0 \in X, y_0 \in Y$ und $(x_0, y_0) \in X \times Y$ als Endpunkte der Schlaufen.

$$\begin{aligned} f : \Pi_1(X \times Y) &\to \Pi_1 X \times \Pi_1 Y \\ [\gamma] &\mapsto ([p_1 \circ \gamma], [p_2 \circ \gamma]) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \Pi_1 X \times \Pi_1 Y &\to \Pi_1(X \times Y) \\ ([\gamma_1], [\gamma_2]) &\mapsto [(\gamma_1, \gamma_2)] \end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind wohldefiniert: Für eine Homotopie $H \operatorname{rel}\{0,1\}$ zwischen α, β sind $H_1 = p_1 \circ H \operatorname{rel}\{0,1\}$ resp. $H_2 = p_2 \circ H \operatorname{rel}\{0,1\}$ Homotopien zwischen $p_1 \circ \alpha$ und $p_1 \circ \beta$ resp. $p_2 \circ \alpha$ und $p_2 \circ \beta$. Für Homotopien $H_1, H_2 \operatorname{rel}\{0,1\}$ zwischen α_1, β_1 sowie α_2, β_2 ist $H = (H_1, H_2) \operatorname{rel}\{0,1\}$ Homotopie zwischen (α_1, α_2) und (β_1, β_2).

Diese Abbildungen sind auch Gruppenhomomorphismen:

$$p_i((\alpha \star \beta)(t)) = \begin{cases} p_i(\alpha(2\,t)) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ p_i(\beta(2\,t - 1)) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = (p_i \circ \alpha) \star (p_i \circ \beta)(t)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) \star (\beta_1, \beta_2)(t) = \begin{cases} (\alpha_1(2\,t), \alpha_2(2\,t)) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ (\beta_1(2\,t - 1), \beta_2(2\,t - 1)) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = (\alpha_1 \star \beta_1, \alpha_2 \star \beta_2)$$

Nach den anfänglichen Überlegungen ist auch schnell klar, dass $f \circ g = \mathrm{id}_{\Pi_1 X \times \Pi_1 Y}$ und $g \circ f = \mathrm{id}_{\Pi_1(X \times Y)}$. □

Korrolar 1. *Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann gilt*

$$\Pi_1(X \times \mathbb{R}) \simeq \Pi_1 X$$

Beweis. $\Pi_1 \mathbb{R} \simeq \{1\}$, also mit Lemma 1 folgt

$$\Pi_1(X \times \mathbb{R}) \simeq \Pi_1 X \times \{1\} \simeq \Pi_1 X$$

□

Direkter Beweis. X ist eine Retraktion (als $X \times \{0\}$ sogar starker Deformationsretrakt) von $X \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : X &\to X \times \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x, 0) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : X \times \mathbb{R} &\to X \\ (x, t) &\mapsto x \end{aligned}$$

Klar ist $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g : (x, t) \mapsto (x, 0)$ homotop zu $\mathrm{id}_{X \times \mathbb{R}}$ via

$$\begin{aligned} H : X \times \mathbb{R} \times [0, 1] &\to X \times \mathbb{R} \\ (x, t, s) &\mapsto (x, s \cdot t) \end{aligned}$$

Damit sind $X \times \mathbb{R}$ und X homotopieäquivalente Räume, nach einem Korollar aus der Vorlesung sind dann ihre Fundamentalgruppen isomorph. □

Aufgabe 2

Behauptung 1. *Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ist S^n einfach zusammenhängend.*

Beweis. Wir wollen Aufgabe 3 von Blatt 7 benutzen. Da S^n Hausdorff ist, so sind sowohl $U = S^n \setminus N$ und $V = S^n \setminus S$ offene Teilmengen, wo $N = (0, \ldots, 0, +1)$ den Nord- und $S = (0, \ldots, 0, -1)$ den Südpol bezeichnet. Klar ist $U \cup V = S^n$ und klar auch $U \cap V \neq \emptyset$, solange $n \geq 1$.

Durch die stetige Involution $\sigma : S^n \to S^n, (x_0, \ldots, x_n) \mapsto (x_0, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$, die Spiegelung an der Hyperebene $x_n = 0$, wissen wir, dass U und V homöomorph sind. Es reicht also zu zeigen, dass U einfach zusammenhängend und $U \setminus S = U \cap V$ wegzusammenhängend ist.[1]

Dies geht über die stereographische Projektion, die $S^n \setminus N$ homöomorph auf $\mathbb{R}^n$ abbildet. Dazu denke $\mathbb{R}^n$ als Hyperebene $E = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_n = h\}$, mit $h \neq 1$, hier $h = 0$. Punkte von E und U stehen dann über die Geraden durch N, die E und U jeweils genau einmal treffen, in Bijektion. Wir werden diese Bijektion in Formeln fassen, um ihre Stetigkeit (in beiden Richtungen) zu beweisen.

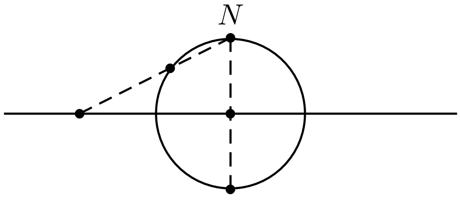

Abbildung 1: Stereographische Projektion in $\mathbb{R}^2$

[1] Tatsächlich wird nur die letzte Bedingung im Fall $n = 1$ verletzt.

Für $\varphi : S^n \setminus N \to \mathbb{R}^n$ sei also $x \in S^n$, $x \neq N$. Wegen $\|x\|_2 = 1$ gilt dann $x_n \neq 1$. Die Gerade durch x und N ist durch $t \in \mathbb{R}$, $t\,x + (1-t)\,N$ gegeben. Der Schnittpunkt mit E findet sich durch

$$t\,x_n + (1-t)\,1 = t\,(x_n - 1) + 1 = 0 \iff t = \frac{1}{1-x_n}$$

So definiere $\varphi(x) = \frac{1}{1-x_n}\,(x_0, \ldots, x_{n-1})$. Dies ist dank $x_n \neq 1$ klar eine stetige Abbildung.

Für $\psi : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus N$ sei $x = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Setze $x' = (x_0, \ldots, x_{n-1}, 0) \in E$. Die Gerade durch x' und N sei wieder durch $t \in \mathbb{R}, t\,x' + (1-t)\,N$ gegeben. Den Schnittpunkt mit S^n finden wir durch

$$1 = \left\|t\,x' + (1-t)\,N\right\|_2^2 = t^2\,\|x\|_2^2 + (1-t)^2 \iff t\,\Big(t(\|x\|_2^2 + 1) - 2\Big) = 0$$

$t = 0$ ergibt den Nordpol N, der uns hier nicht interessiert. Wir wollen $t = \frac{2}{1+\|x\|_2^2}$. Also definiere $\psi(x) = \frac{2}{1+\|x\|_2^2}\,x' + \Big(1 - \frac{2}{1+\|x\|_2^2}\Big)\,N$. Dies ist auch offensichtlich eine stetige Abbildung.

Durch Nachrechnen kann prüfen, dass die beiden Abbildungen zueinander invers sind, wenn das nicht schon durch die geometrischen Randbedingungen ersichtlich sein sollte.

Damit sind U und V homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ welches zusammenziehbar ist; also auch einfach zusammenhängend.

Ferner ist offensichtlich $\varphi(S) = 0$, also $U \setminus S$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n \setminus 0$. Solange $n \geq 2$, kann man sich leicht überzeugen, dass $\mathbb{R}^n \setminus 0$ wegzusammenhängend ist. Für $n = 1$ ist das aber nicht der Fall: $\mathbb{R} \setminus 0$ hat offensichtlich die Zusammenhangskomponenten $\mathbb{R}_{>0}$ und $\mathbb{R}_{<0}$. □

Aufgabe 6

Satz 1 (von Heine)**.** *Seien X, Y metrische Räume, X zudem kompakt und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist f gleichmäßig stetig, d.h.*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\forall y \in Y : V_y = \mathbf{k}_{\varepsilon/2}(y), U_y = f^{-1}(V_y)$. Da f stetig ist, ist $X = \bigcup_{y \in Y} U_y$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt und metrisch ist, hat diese Überdeckung eine Lebesguezahl $\delta > 0$.

Seien nun $x, x' \in X$ mit $d(x, x') < \delta$. Dann ist $\operatorname{diam}\{x, x'\} = d(x, x') < \delta$, somit gibt es $y \in Y$ mit $\{x, x'\} \subset U_y$, also $f(\{x, x'\}) \subset V_y = \mathbf{k}_{\varepsilon/2}(y)$. D.h.

$$d(f(x), f(x')) \leq d(f(x), y) + d(y, f(x')) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

□

Bemerke, dass die Definition von gleichmäßig stetig nur Sinn macht, wenn X und Y metrische Räume sind. Natürlich gibt es auf nicht kompakten metrischen Räumen gleichmäßig stetige Abbildungen, z.B. die konstanten Abbildungen.

Für ein Beispiel einer stetigen Funktion, die jedoch nicht gleichmäßig stetig ist, siehe Forster, Analysis I, §11, *Gleichmäßige Stetigkeit*, wo das Beispiel $f :]0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ untersucht wird.