Aufgabe 3

Lemma 1. *Sei X ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es $\delta > 0$, die sogenannte* Lebesguezahl*, so dass für jedes $A \subset X$ mit* $\operatorname{diam} A < \delta$ *ein $U_i \in \mathcal{U}$ mit $A \subset U_i$ existiert.*

Man erinnere die Definition

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$$

Beweis. Es gibt $\forall x \in X$ ein $i \in I$ mit $x \in U_i$. Da U_i offen, gibt es dann $\varepsilon(x) > 0$ mit $\mathbf{k}_{2\,\varepsilon(x)}(x) \subset U_i$. Es ist $X = \bigcup_{x\in X} \mathbf{k}_{\varepsilon(x)}(x)$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt, gibt es eine endliche Teilüberdeckung: $\exists x_1, \ldots, x_n$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{k}_{\varepsilon(x_i)}(x_i)$.

Definiere $\delta := \min\{\varepsilon(x_1), \ldots, \varepsilon(x_n)\}$.

Für $A \subset X$ mit $\operatorname{diam} A < \delta$ wähle $a_0 \in A$. Dank obiger Überdeckung gibt es x_k mit $d(a_0, x_k) < \varepsilon(x_k)$. Für $a \in A$ beliebig gilt dann

$$d(a, x_k) \le d(a, a_0) + d(a_0, x_k) < \delta + \varepsilon(x_k) \le 2\,\varepsilon(x_k)$$

Also ist $a \in \mathbf{k}_{2\,\varepsilon(x_k)}(x_k)$, und damit gilt $A \subset \mathbf{k}_{2\,\varepsilon(x_k)}(x_k) \subset U_i$ für ein $i \in I$. □

Behauptung 1. *Sei X ein topologischer Raum mit offenen Teilmengen U, V, so dass $U \cup V = X$. Sei $\gamma : [0,1] \to X$ ein stetiger Weg in X. Dann gibt es $\gamma_k, k = 1, \ldots, n$ stetige Wege in X, so dass* $\operatorname{Bild}\gamma_k$ *ganz in U oder ganz in V und*

$$\gamma \sim \gamma_1 \star \cdots \star \gamma_n \ \operatorname{rel}\{0,1\},$$

wobei $\star$ das Wegprodukt bezeichnet.

Beweis. Da U, V offen, so bilden $\gamma^{-1}(U)$ und $\gamma^{-1}(V)$ eine offene Überdeckung des kompakten topologischen Raums $[0,1]$. Sei $\delta > 0$ eine Lebesguezahl dieser Überdeckung. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \delta$.

Definiere $t_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, \ldots, n$ und $I_k = [t_{k-1}, t_k]$. Da $\operatorname{diam} I_k = \frac{1}{n} < \delta$, so ist jedes I_k entweder ganz in $\gamma^{-1}(U)$ oder ganz in $\gamma^{-1}(V)$ enthalten. Somit ist jedes $\gamma(I_k)$ ganz in U oder ganz in V enthalten. Setze also $\gamma_k = \gamma|_{I_k}$. Offensichtlich gilt dann auch

$$\gamma \sim \gamma_1 \star \cdots \star \gamma_n \ \operatorname{rel}\{0,1\}.$$

□