Aufgabe 3

Sei $X, \mathcal{O}$ ein top. Raum, $X_0 \subset X$ ein Teilraum; nenne die Inklusion $i : X_0 \hookrightarrow X$. Sei $\sim$ eine Aequivalenzrelation auf X (dann auch auf X_0). Dies liefert Quotientenabbildungen

$$\begin{aligned} \pi : X &\to X/_\sim & \qquad \pi_0 : X_0 &\to X_0/_\sim \\ x &\mapsto [x] = \{y \in X : x \sim y\} & x &\mapsto [x]_0 = \{y \in X_0 : x \sim y\} \end{aligned}$$

wobei wir die Quotienten $X/_\sim$ und $X_0/_\sim$ mit der Quotiententopologie $\mathcal{O}_{\text{quot}}$ resp. $\mathcal{O}^0_{\text{quot}}$ versehen.

Nun betrachte $\pi \circ i : X_0 \to X/_\sim$. Offensichtlich gilt $\pi(i(x)) = \pi(i(y)) \iff x \sim y$ und also faktorisiert $\pi \circ i$ injektiv unter π_0 zu $j : X_0/_\sim \to X/_\sim$, wobei j stetig bezüglich $\mathcal{O}^0_{\text{quot}}$ und $\pi \circ i = j \circ \pi_0$, d.h. $j([x]_0) = [x]$ und das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi_0"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ X_0/_\sim \arrow[r, hook, "j"] & X/_\sim \end{tikzcd}$$

j erlaubt es also, den Quotienten von X_0 als Teilmenge des Quotienten von X zu sehen. j stetig bezüglich $\mathcal{O}^0_{\text{quot}}$ heißt nun aber, dass

$$\mathcal{O}^0_{\text{ind}} = \{j^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}_{\text{quot}}\} \subset \mathcal{O}^0_{\text{quot}}.$$

„$\supset$“ gilt allerdings im Allgemeinen nicht. Dazu nehme $X = \mathbb{R}$, $X_0 = \mathbb{Q}$ und $\sim$ die Aequivalenzrelation, welche $A = [-r, r]$ zusammenschlägt, wo $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine beliebige irrationale Zahl ist, z.B. $r = \sqrt{2}$.

$$A_0 = i^{-1}(A) = A \cap \mathbb{Q} = [-r, r] \cap \mathbb{Q} =]-r, r[\cap \mathbb{Q}$$

ist offen in $\mathbb{Q}$, somit ist $\pi_0(A_0) = \{A_0\}$ offen in $\mathcal{O}^0_{\text{quot}}$.

Sei nun $O \in \mathcal{O}_{\text{quot}}$ mit $j^{-1}(O) = \{A_0\}$, d.h. $i^{-1}(\pi^{-1}(O)) = \pi_0^{-1}(j^{-1}(O)) = A_0$. Dann muss $A \subset \pi^{-1}(O)$ gelten. D.h. es gibt $\varepsilon > 0$, mit $[r, r + \varepsilon] \subset \pi^{-1}(O)$, da $\pi^{-1}(O)$ offen in $\mathbb{R}$. Aber dann ist sicher $i^{-1}(\pi^{-1}(O)) = \pi^{-1}(O) \cap \mathbb{Q} \neq A \cap \mathbb{Q} = A_0$ und wir haben einen Widerspruch gefunden.

Aufgabe 4

(c)

Ende Beweis.

$$x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \implies \exists i : x_i \neq 0 \implies \exists i : x \in W_i$$

Folglich $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 = \bigcup_{i=0}^{n} W_i$ und damit $\mathbb{PR}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$. □

(d)

Behauptung 1. $\mathbb{PR}^{n-1} \simeq U_i^c$

Beweis.

$$\pi^{-1}(U_i{}^c) = W_i{}^c = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \mid x_i = 0\}$$

Definiere $j : \mathbb{R}^n \setminus 0 \to W_i{}^c, x \mapsto (x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-1})$, offensichtlich stetig und surjektiv.

Also ist auch $\varphi : \pi \circ j : \mathbb{R}^n \setminus 0 \to U_i{}^c$ stetig und surjektiv. Weiter gilt: $\varphi(y) = \varphi(x) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^\star : y = \lambda\, x$. Also faktorisiert φ injektiv:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \setminus 0 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U_i{}^c \\
\mathbb{PR}^{n-1} \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Damit ist $\tilde{\varphi}$ eine stetige Bijektion von einem Kompaktum in eien Hausdorffraum (gemäß b), also ein Homöomorphismus. □