Aufgabe 4

Sei $X, \mathcal{O}$ ein topologischer Raum. Sei $\hat{X} = X \cup \{*\}$ die disjunkte Vereinigung von X mit einem Punkt $*$.

Setze

$$\mathcal{O}_* = \{U \subset \hat{X} \mid * \in U \text{ und } X \setminus U \text{ abg. in X und kompakt}\}$$

sowie $\hat{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cup \mathcal{O}_*$.

Behauptung 1. *$\hat{\mathcal{O}}$ definiert eine Topologie auf $\hat{X}$.*

Beweis.

T1 Seien $U_i \in \hat{\mathcal{O}}, i \in I$. Falls $* \in \bigcup_{i \in I} U_i$, so $\exists j \in I : * \in U_j$, d.h. $U_j \in \mathcal{O}_*$ und folglich U_j kompakt. Wir bemerken außerdem, dass $X \setminus O$ für alle $O \in \hat{O}$ abgeschlossen in X ist.

Somit ist

$$X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) \subset X \setminus U_j$$

abgeschlossen in X und, weil Teilmenge eines Kompaktums, kompakt. Also $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}_* \subset \hat{\mathcal{O}}$.

Falls $* \notin \bigcup_{i \in I} U_i$, so $* \notin U_i \, \forall i \in I$, also $U_i \in \mathcal{O} \, \forall I$. Da $\mathcal{O}$ Topologie ist, folgt $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O} \subset \hat{\mathcal{O}}$.

T2 Seien $O, O' \in \hat{\mathcal{O}}$.

$* \in O \cap O' \implies O, O' \in \mathcal{O}_* \implies X \setminus (O \cap O') = X \setminus O \cup X \setminus O'$ Aber die Vereinigung zweier abgeschlossener, kompakter Teilmengen von X ist ebenfalls abgeschlossen in X und kompakt, also $O \cap O' \in \mathcal{O}_*$.

Wenn $* \notin O \cap O'$, so z.B. $O \in \mathcal{O}$. Falls auch $O' \in \mathcal{O}$, so folgt sofort $O \cap O' \in \mathcal{O} \subset \hat{\mathcal{O}}$. Wenn aber $O' \in \mathcal{O}_*$, so ist $X \setminus O'$ abgeschlossen in X, damit $X \setminus (X \setminus O') = X \cap O' \in \mathcal{O}$ und klar ist $O \cap O' = O \cap (X \cap O')$ dann offen in X und auch $\hat{X}$.

T3 $\emptyset \in \mathcal{O} \subset \hat{\mathcal{O}}$, $X \setminus \hat{X} = \emptyset$ abg. in X und kompakt $\implies \hat{X} \in \hat{\mathcal{O}}$.

□