Aufgabe 3

Sei X ein topologischer Raum. Für $x, y \in X$ definiere die Aequivalenzrelation $x \sim y$ durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \exists \gamma : [0,1] \to X \text{ stetig, mit } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y.$$

Die Klassen dieser Aequivalenzrelation nennt man die *Wegkomponenten* von X, und X heißt wegzusammenhängend, wenn es genau eine Klasse gibt.

Definition 1. Ein topologischer Raum X heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn für alle $x \in X$ jede Umgebung von x eine wegzusammenhängende Umgebung von X enthält, d.h.

$$\forall x \in X : \forall U \in \mathcal{U}_x : \exists V \in \mathcal{U}_x : V \subset U \text{ und } V \text{ wegzusammenhängend.}$$

Behauptung 1. *Sei X lokal wegzusammenhängend. Dann sind die Wegkomponenten von X offen und abgeschlossen in X.*

Beweis. Sei $[x]$ die Aequivalenzklasse von $x \in X$. Da X lokal wegzusammenhängend, gilt: $X \in \mathcal{U}_x \implies \exists V \in \mathcal{U}_x$ mit V wegzusammenhängend. Es folgt: $\forall y \in V : \exists \gamma : [0,1] \to V$ stetig mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Mit der (stetigen) Inklusion $\iota : V \to X$ bekommt man einen Weg $\iota \circ \gamma$ in X von x nach y, also gilt $x \sim y$ und $V \subset [x]$. Damit ist $[x]$ Umgebung von x ($[x] \in \mathcal{U}_x$).

Nun für alle $y \in [x]$ gilt $[y] = [x]$, mit dem obigen Argument für y erhält man $[x] \in \mathcal{U}_y \ \forall y \in [x]$, d.h. $[x]$ ist offen.

Ferner kann man schreiben

$$[x] = X \setminus \left(\bigcup_{y \not\sim x} [y] \right).$$

Da die $[y]$ alle offen sind, folgt mit $\mathsf{T1}$, dass $[x]$ abgeschlossen ist. $\square$

Behauptung 2. *X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend $\implies$ X wegzusammenhängend.*

Beweis. Sei $x \in X$. Dann ist $[x] \neq \emptyset$ offen und abgeschlossen in X. Da X zusammenhängend, folgt $[x] = X$ und dies sagt X ist wegzusammenhängend. $\square$