Aufgabe 5

Sei (F, d) ein metrischer Raum, $p \in F$ ein ausgezeichneter Punkt. Definiere

$$d_p(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ d(x,p) + d(p,y) & x \neq y \end{cases}.$$

Behauptung 1. $d_p : F \times F \to \mathbb{R}$ *ist eine Metrik.*

Beweis. (i) $d_p(x,y) \geq 0$ folgt direkt aus $d(x,p), d(p,y) \geq 0$.

Klar gilt auch immer $d_p(x,x) = 0$. Zu zeigen ist noch $d_p(x,y) = 0 \implies x = y$:

Seien $x, y \in F$ mit $d_(x,y) = 0$ mit $x \neq y$. Dann ist $d_p(x,y) = d(x,p) + d(p,y) = 0$. Da $d(x,p), d(p,y) \geq 0$, so muss $d(x,p) = 0$ und $d(p,y) = 0$ gelten. Da d Metrik ist, folgt $x = p$ und $p = y$, also $x = y$. Widerspruch.

(ii) $d_p(x,y) = d_p(y,x)$ ist offensichtlich erfüllt, da auch d symmetrisch ist, und $(\mathbb{R}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(iii) Es fehlt noch die Dreiecksungleichung $d_p(x,z) \leq d_p(x,y) + d_p(y,z)$:

Die Fälle $x = z$, $x = y$ und $y = z$ sind allesamt trivial.

Seien also $x \neq z$, $x \neq y$ und $y \neq z$. Dann folgt mit $d(p,y) \geq 0$:

$$d_p(x,z) = d(x,p)+d(p,z) \leq d(x,p)+d(p,y)+d(y,p)+d(p,z) = d_p(x,y)+d_p(y,z)$$

□

Nun fixiere $F = \mathbb{R}^2$, $d = d^2$ die euklidische Metrik, $p = 0$.

Behauptung 2. $x \in F, x \neq p \implies \{x\}$ *offen in* $\mathcal{O}(d_p)$.

Beweis. $x \neq p \implies \varepsilon := d(x,p) > 0$. Dann ist die offene Kugel

$$\mathbf{k}_\varepsilon^{d_p}(x) = \{y \in F : d_p(x,y) < \varepsilon\} = \{x\}$$

$$\text{da } y \neq x \implies d_p(x,y) = \underbrace{d(x,p)}_{=\varepsilon} + \underbrace{d(p,y)}_{\geq 0} \geq \varepsilon$$

□

Behauptung 3. $\mathbf{K}_\varepsilon^{d_p}(p) = \mathbf{K}_\varepsilon^{d}(p), \quad \mathbf{k}_\varepsilon^{d_p}(p) = \mathbf{k}_\varepsilon^{d}(p)$

Beweis.

$$y \neq p: \quad d_p(y,p) = d(y,p) + \underbrace{d(p,p)}_{=0} = d(y,p)$$

□

Es folgt, dass $\mathcal{O}(d_p) \not\subset \mathcal{O}(d)$, da $\{x\}$ nicht offen in $\mathcal{O}(d)$, also insbesondere $\mathcal{O}(d_p) \neq \mathcal{O}(d)$.

Es gilt aber $\mathcal{O}(d_p) \supset \mathcal{O}(d)$, da

$$\forall x \in F : \forall \varepsilon > 0 : \begin{cases} \text{falls } x = p \; \exists \varepsilon' = \varepsilon > 0 : & \mathbf{K}_{\varepsilon'}^{d_p}(x) \subset \mathbf{K}_\varepsilon^{d}(x) \\ \text{falls } x \neq p \; \exists \varepsilon' = d(x,p) > 0 : & \mathbf{K}_{\varepsilon'}^{d_p}(x) = \{x\} \subset \mathbf{K}_\varepsilon^{d}(x) \end{cases}$$

Bemerkung 1. $\mathcal{O}(d_p)$ ist fast die diskrete Topologie. Wenn man den Teilraum $F \setminus \{p\}$ betrachtet, so ist darauf die Teilraumtopologie bezüglich F mit der Topologie $\mathcal{O}(d_p)$ die diskrete Topologie.

Bemerkung 2. Diese Metrik sollte man *Postmetrik* nennen. Denn die Post sammelt an allen Orten Briefe ein, transportiert sie zum zentralen Verteilzentrum, sortiert sie dort und transportiert sie anschließend an den Zustellort.[1]

Unter der *Metrik der französischen Eisenbahn* kann man sich konkreter folgende Metrik vorstellen:

Sei V ein Vektorraum mit Metrik $d : V \times V \to \mathbb{R}$. Definiere nun

$$d'(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & \text{falls } x, y \text{ linear abhängig} \\ d(x,0) + d(0,y) & \text{falls } x, y \text{ linear unabhängig} \end{cases}$$

x, y linear abhängig heißt, dass beide Punkte auf einer Geraden durch 0, also einen 1-dimensionalen Unterraum liegen.

Ähnlich wie für d_p kann man zeigen, dass d' eine Metrik ist. Wenn $V = \mathbb{R}^2$ ist, kann man sich Paris in 0 denken. Wenn man von einem Ort zu einem anderen gelangen will, muss man über Paris fahren, es sei denn, die Orte liegen beide an derselben Bahnlinie, die von Paris ausgeht.

[1] In der Schweiz ist das nicht ganz so extrem: Es gibt immerhin drei große Verteilzentren. Aber bis auf Ausnahmen (z.B. A-Post innerhalb des Tessin) laufen alle Briefe über diese Verteilzentren.