Aufgabe 3d

Behauptung 1. *Sei (T, d) ein metrischer Raum mit Topologie $\mathcal{O}(d)$. Sei $X \subset T$ mit der Teilraumtopologie $\mathcal{O}_{\text{ind}}$ versehen. Dann ist $(X, \mathcal{O}_{\text{ind}})$ metrisierbar.*

Beweis. (1) Wir haben $d : T \times T \to \mathbb{R}$, Metrik auf T.

Dann ist $d|_X : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf X.

Also haben wir auf X neben der von T induzierten Topologie $\mathcal{O}_{\text{ind}}$ noch eine Topologie $\mathcal{O}(d|_X)$.

Ziel: $\mathcal{O}_{\text{ind}} \stackrel{\text{zz}}{=} \mathcal{O}(d|_X)$.

(2) Betrachten wir offene Kugeln in T und X mit den jeweiligen Metriken:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{k}_\varepsilon^T(x) = \{y \in T \mid d(x, y) < \varepsilon\} && \text{für } x \in T \\
&\mathbf{k}_\varepsilon^X(x) = \{y \in X \mid d|_X(x, y) = d(x, y) < \varepsilon\} && \text{für } x \in X \\
&\mathbf{k}_\varepsilon^X(x) = X \cap \mathbf{k}_\varepsilon^T(x) && \text{für } x \in X
\end{aligned}$$

(3) Zunächst zeigen wir, dass wir offene Mengen in $\mathcal{O}(d)$ immer als Vereinigung von offenen Kugeln schreiben können:

$$O \in \mathcal{O}(d) \stackrel{\text{zz}}{\iff} \exists x_i, \varepsilon_i : O = \bigcup_{i \in I} \mathbf{k}_{\varepsilon_i}(x_i)$$

[$\Leftarrow$] folgt aus (T1) und $\mathbf{k}_{\varepsilon_i}(x_i)$ offen.

$$[\Rightarrow] \quad O \in \mathcal{O}(d) \implies \forall x \in O : \exists \varepsilon_x > 0 : \mathbf{k}_{\varepsilon_x}(x) \subset \mathbf{K}_{\varepsilon_x}(x) \subset O$$

$$\implies O \subset \bigcup_{x \in O} \mathbf{k}_{\varepsilon_x}(x) \subset O$$

(4) $\mathcal{O}_{\text{ind}} \stackrel{\text{zz}}{\supset} \mathcal{O}(d|_X)$

$$O \in \mathcal{O}(d|_X) \implies O = \bigcup_{x \in O} \mathbf{k}_{\varepsilon_x}^X(x) \qquad \text{Setze } O' = \bigcup_{x \in O} \mathbf{k}_{\varepsilon_x}^T(x) \text{ offen in } T$$

$$X \cap O' = \bigcup_{x \in O} \left(X \cap \mathbf{k}_{\varepsilon_x}^T(x)\right) = \bigcup_{x \in O} \mathbf{k}_{\varepsilon_x}^X(x) = O \qquad \implies O \in \mathcal{O}_{\text{ind}}$$

(5) $\mathcal{O}_{\text{ind}} \stackrel{\text{zz}}{\subset} \mathcal{O}(d|_X)$

$$O \in \mathcal{O}_{\text{ind}} \implies \exists O' \text{ offen in } T \text{ mit } O' \cap X = O$$

$$\implies O' = \bigcup_{x \in O'} \mathbf{k}_{\varepsilon_x}^T(x) \supset \bigcup_{x \in O} \mathbf{k}_{\varepsilon_x}^T(x) = O'' \supset O$$

$$O = O' \cap X \supset O'' \cap X \supset O \cap X = O$$

$$\implies O = O' \cap X = O'' \cap X = \bigcup_{x \in O} \left(X \cap \mathbf{k}_{\varepsilon_x}^T(x)\right) = \bigcup_{x \in O} \mathbf{k}_{\varepsilon_x}^X(x) \in \mathcal{O}(d|_X)$$

□