## Aufgabe 1

**Behauptung 1.** *Sei $X, \mathcal{O}$ ein topologischer Raum. Sei $\mathcal{U}_x$ die Menge der Umgebungen eines Punktes $x \in X$. Dann sind folgende äquivalent:*

*(a)* $\forall x \in X, \forall U \in \mathcal{U}_x, \exists V \in \mathcal{U}_x : V \subset U, V$ *wegzusammenhängend.*

*(b)* $\forall x \in X, \forall U \in \mathcal{U}_x, \exists V \in \mathcal{U}_x : V \subset U, V \in \mathcal{O}, V$ *wegzusammenhängend.*

Eigenschaft (a) heißt *lokal wegzusammenhängend.*

**Proposition 2.** *Es erfülle $X$ Eigenschaft (a), und es sei $O \subset X$ offen. Dann erfüllt auch $O$ die Eigenschaft (a).*

*Beweis Proposition.* Sei $x \in O$, $U \subset O$ Umgebung von $x$ in $O$. D.h. $U = U' \cap O$, wo $U \in \mathcal{U}_x$ Umgebung von $x$ in $X$ ist. Nun $O \in \mathcal{U}_x \implies U \in \mathcal{U}_x$.

Da $X$ (a) erfüllt, $\exists V \in \mathcal{U}_x$, $V \subset U$ und $V$ wegzusammenhängend. Klar ist aber $V$ auch Umgebung von $x$ in $O$. So $O$ erfüllt ebenfalls Eigenschaft (a). □

*Beweis Behauptung.* [(b) $\Rightarrow$ (a)] trivial.
[(a) $\Rightarrow$ (b)] Sei $x \in X$, $U \in \mathcal{U}_x$. Dann $\exists O \subset U, O \in \mathcal{U}_x, O \in \mathcal{O}$. Dank der vorhergehenden Proposition ist $O$ lokal wegzusammenhängend. Aus Blatt 4, Aufgabe 3 wissen wir, dass die Wegkomponenten von $O$ offen sind. Die Wegkomponenten sind auch wegzusammenhängend. Sei $[x]_O$ die Wegkomponente von $x$ in $O$. Dieses ist offen in $O$, da $O$ offen, so ist $[x]_O$ auch noch offen in $X$. $[x]_O$ ist also das gesuchte $V$. □

## Aufgabe 2

Sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung, $h : Y \to Y$ eine stetige Abbildung über $X$, d.h. $\pi \circ h = \pi$ oder $\forall x \in X :\ y \in Y_x \iff h(y) \in Y_x$.

**Behauptung 3.** *$h$ ist ein lokaler Homöomorphismus.*

*Beweis.* Sei $y \in Y$, $x = \pi(y)$ und $U \subset X$ eine schöne Umgebung von $x$. Dann zerfällt $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ in disjunkte, offene Blätter. Sei $U_0$ das Blatt, das $y$ enthält, und $U_1$ das Blatt, welches $h(y)$ enthält.

Definiere $V = U_0 \cap h^{-1}(U_1)$. Klar ist $y \in V$. $h|_V$ ist injektiv, denn $V$ ist Teil des Blattes $U_0$, das jede Faser von $\pi$ in höchstens einem Punkt schneidet. $h(V) \subset U_1$ ist auch in einem Blatt enthalten. Da $h$ die Fasern invariant lässt, entspricht $h|_V$ dem Projizieren vom Blatt $U_0$ auf das Blatt $U_1$, also $h|_v = P|_v$ wobei $P = (\pi|_{U_1 \cap})^{-1} \circ \pi|_{U_0} : U_0 \to U_1$. $P$ ist ein Homöomorphismus zwischen offenen Teilmengen von $Y$, so wegen $V$ offen ist auch $h(V)$ offen und $h|_V$ ein Homöomorphismus. □

**Lemma 1.** *Sei $\gamma : [0,1] \to Y$ ein Weg, $y \in Y$ mit $h(y) = \gamma(0) = y_0$. Dann gibt es einen eindeutigen Weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \to Y$ mit $\tilde{\gamma}(0) = y$ und $h \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.*

*Beweis.* Sei $\gamma_0 = \pi \circ \gamma$. Dies ist ein Weg in $X$. Die eindeutige Liftung von $\gamma_0$ zum Anfangspunkt $y'$ ist natürlich $\gamma$.

Sei nun $\tilde{\gamma}$ die eindeutige Liftung von $\gamma_0$ zum Anfangspunkt $y$. Dann gilt $\gamma_0 = \pi \circ \tilde{\gamma} = \pi \circ h \circ \tilde{\gamma}$. Offensichtlich ist $h \circ \tilde{\gamma}(0) = h(y) = y' = \gamma(0)$. So $h \circ \tilde{\gamma}$ ist eine Liftung von $\gamma_0$ zum Anfangspunkt $y'$, genau wie $\gamma$. Aus der Eindeutigkeit der Liftung folgt dann $h \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. □

**Behauptung 4.** *Ist $Y$ global und lokal wegzusammenhängend, so ist $h$ eine Überlagerung.*

*Beweis.*
- $h$ stetig ist gegeben.
- $h^{-1}(y)$ ist diskret. Es gilt $y' \in Y_x \iff h(y') \in Y_x$. Damit ist $h^{-1}(y) \subset Y_x$. Aber $Y_x$ ist nach Voraussetzung diskret, und jeder Unterraum eines diskreten Raums ist ebenfalls diskret.
- $h$ ist auch surjektiv: Sei $y \in Y$ beliebig, und $y' = h(y)$. Sei $\gamma : y' \rightsquigarrow y$ ein Weg – dieser existiert, da $Y$ global wegzusammenhängend. Sei $\tilde{\gamma} : y \rightsquigarrow y''$ die Liftung durch $h$ an $y$ wie in Lemma 1. Dann gilt $h(y'') = h \circ \tilde{\gamma}(1) = \gamma(1) = y$.
- $h$ ist lokal trivial. Sei $y \in Y$, $x = \pi(y)$. Sei $U \subset X$ eine schöne Umgebung von $x$. Seien $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ die offenen, disjunkten Blätter. Sei $y \in U_0$. $U_0$ enthält dann eine offene wegzusammenhängende Umgebung von $y$ (Aufgabe 1). O.E. können wir dann annehmen, dass $U$ und alle Blätter $U_\lambda$ wegzusammenhängend sind.

  $U_0$ wird unsere schöne Umgebung von $y$ sein: Denn $U_0$ ist offen und abgeschlossen in $\pi^{-1}(U)$, somit ist $h^{-1}(U_0)$ offen und abgeschlossen in $\pi^{-1}(U)$. Da jedes $U_\lambda$ zusammenhängend ist, folgern wir:
  $$\forall \lambda \in \Lambda : \quad h^{-1}(U_0) \cap U_\lambda = \emptyset \text{ oder } = U_\lambda$$
  So $h^{-1}(U_0) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} U_\lambda$. Da $\pi|_{U_0} : U_0 \to U$ ein Homöomorphismus ist, ist dann $h|_{h^{-1}(U_0)} : h^{-1}(U_0) \to U_0$ trivial (denn $\pi|_{\pi^{-1}(U)}$ ist trivial und so auch $h|_{h^{-1}(U_0)} = (\pi|_{U_0})^{-1} \circ \pi|_{\pi^{-1}(U)}$). □

**Behauptung 5.** *Ist weiter $\pi$ endlich, so ist $h$ gar ein Homöomorphismus.*

*Beweis.* Schränken wir $h$ ein auf die Faser $Y_x$. Da weiter gilt $h^{-1}(Y_x) \subset Y_x$, und $h : Y \to Y$ surjektiv (von der vorigen Behauptung), so ist auch $h|_{Y_x} : Y_x \to Y_x$ surjektiv. Wenn aber $Y_x$ endlich ist, so muss $h|_{Y_x}$ auch injektiv sein.

Damit ist $h : Y \to Y$ gesamthaft bijektiv. $h$ ist nach Voraussetzung stetig, und dank Behauptung 3 ein lokaler Homöomorphismus, also insbesondere offen. Dann ist aber $h$ auch global ein Homöomorphismus. □

## Aufgabe 4

Sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung, wobei $X$ einfach zusammenhängend ist. Wir fixieren einen Basispunkt $x_0 \in X$ und definieren eine Abbildung
$$h : X \times Y_{x_0} \to Y, \;\; (x, y_0) \mapsto \tilde{\alpha}(x)^{y_0}(1)$$
wo $\alpha(x) : x_0 \rightsquigarrow x$ ein Weg und $\tilde{\alpha}(x)^{y_0}$ seine Liftung durch $\pi$ mit Startpunkt $y_0$. Offensichtlich gilt dann $h(x, y_0) \in Y_x$.

**Proposition 6.** *$h$ ist wohldefiniert und bijektiv.*

*Beweis.* Seien $\alpha : x_0 \rightsquigarrow x$ und $\beta : x_0 \rightsquigarrow x$ zwei Wege in $X$. Da $X$ einfach zusammenhängend, gilt $\alpha \sim \beta \text{ rel}\{0, 1\}$. Nach dem Monodromielemma haben dann die Hochhebungen $\tilde{\alpha}(x)^{y_0}$, $\tilde{\beta}(x)^{y_0}$ mit Anfangspunkt $y_0$ auch den gleichen Endpunkt. So $h$ ist wohldefiniert.

$h$ ist bijektiv, denn sei $y \in Y$ beliebig. Setze $x = \pi(y)$ und nehme einen Weg $\gamma : x \rightsquigarrow x_0$ ($X$ ist ja wegzusammenhängend). Die Hochhebung $\tilde{\gamma}^y$ mit Anfangspunkt $y$ hat wegen $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ den Endpunkt in $Y_{x_0}$, setze also $y_0 = \tilde{\gamma}(1)$. Es gilt dann $h(x, y_0) = y$, da die Hochhebung von $\alpha(x) = \gamma^{-1}$ genau $\tilde{\gamma}^{-1}$ mit Endpunkt $y$ ist. Dies liefert eine Umkehrabbildung von $h$. □

**Behauptung 7.** *Wenn $X$ sogar lokal wegzusammenhängend ist, dann ist $h$ ein Homöomorphismus.*

*Beweis.* Als erstes untersuchen wir, was bei einem Wechsel des Basispunkts $x_0$ geschieht. Betrachte dazu $h(x', \cdot) : Y_{x_0} \to Y_{x'}$ – das ist bijektiv und die Fasern sind diskret, also ist diese Abbildung immer ein Homöomorphismus. Damit kann man $h' = h \circ (\mathrm{id}_X \times h(x', \cdot))$ betrachten, welches genau dann stetig ist, wenn $h$ stetig ist. Also ist die Wahl von $x_0$ für die Untersuchung der Stetigkeit nicht relevant.

Sei nun $x_0' \in X$ beliebig mit einer schönen, wegzusammenhängenden Umgebung $U$. O.E. sei $x_0 = x_0'$.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\sim \varphi"] \arrow[dr, "\pi|_{\pi^{-1}(U)}"'] & U \times Y_{x_0} \arrow[d, "p_U"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Da $X$ einfach zusammenhängend und $U$ wegzusammenhängend ist, können wir für $x \in U$ das $\alpha(x) : x_0 \rightsquigarrow x$ als Weg in $U$ wählen. Da $\pi$ über $U$ trivial ist, ist das Liften nach $\pi^{-1}(U)$ ebenfalls trivial und man sieht, dass $\varphi^{-1} = h|_{U \times Y_{x_0}}$ gilt, zumindest nach einer Permutation von $Y_{x_0}$ (welche ja einen Homöomorphismus gibt). Dann ist natürlich $h|_{U \times Y_{x_0}} : X \times Y_{x_0} \to \pi^{-1}(U)$ ein Homöomorphismus.

Nun können wir $X$ mit solchen $U$ überdecken, folglich können wir $X \times Y_{x_0}$ mit (offenen) $U' = U \times Y_{x_0}$ überdecken, auf denen $h$ stetig ist. Wie im Beweis für das Pushout der offenen Inklusion gesehen, ist dann $h$ stetig auf ganz $X \times Y_{x_0}$. Wir haben sogar gezeigt, dass $h$ ein lokaler Homöomorphismus ist, da sowohl $U'$ als auch $h(U') = \pi^{-1}(U)$ offen sind. Aber jeder bijektive lokale Homöomorphismus ist ein globaler Homöomorphismus. □

**Korrolar 1.** *Jede Überlagerung über einem Raum, der sowohl einfach zusammenhängend als auch lokal wegzusammenhängend ist, ist trivial.*

*Bemerkung* 1. Die Eigenschaft lokal wegzusammenhängend muss man wirklich fordern.

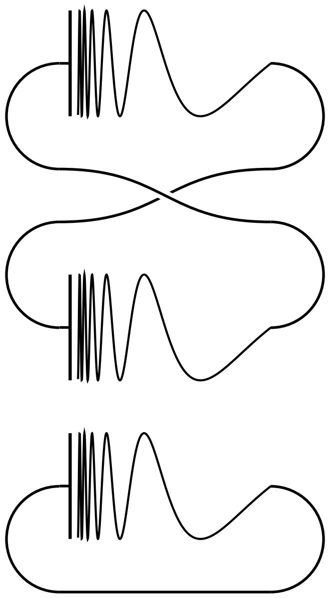

Abbildung 1: Gegenbeispiel