Aufgabe 1

Sei $\xi \in \mathbb{C}^\star$ mit $|\xi| \neq 1$. Setze $r := |\xi|$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $r > 1$ (sonst ersetze ξ durch ξ^{-1}).

Behauptung 1. *Die Untergruppe $\Gamma = \langle \xi \rangle$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}$ und diskret (d.h. auch homöomorph).*

Beweis. Offensichtlich ist die Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \to \Gamma, n \mapsto \xi^n$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Wenn $\mathbb{Z}$ die diskrete Topologie trägt, so ist φ sogar stetig.

φ ist injektiv, da $\xi^n = 1 \implies r^n = 1, r \neq 1 \implies n = 0$, also $\ker \varphi = \{0\}$. So φ ist ein Gruppenisomorphimus.

$|\cdot| : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{R}_{>0}$ und $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ sind stetige Abbildungen, folglich ist $\psi : \Gamma \to \mathbb{Z}, z \mapsto \frac{\log|z|}{\log r}$ das stetige Inverse von φ. □

Behauptung 2. *Die Projektion $\pi : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}^\star/\Gamma$ ist eine Überlagerung.*[1]

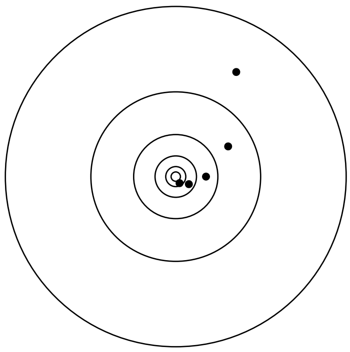

Abbildung 1: Blätter der schönen Umgebung für $[\xi]$, Punkte markieren Γ.

Beweis. Nach Konstruktion ist π surjektiv und stetig. Die Klassen sind die Bahnen der Operation von Γ, also $\pi^{-1}([z]) = z\,\Gamma$. Diese sind homöomorph zu Γ durch eine Einschränkung von $z\cdot : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}^\star, w \mapsto z \cdot w$.

Es bleibt die wichtigste Eigenschaft einer Überlagerung zu zeigen: π soll lokal trivial sein:

Sei $z \in \mathbb{C}^\star$, $[z] \in \mathbb{C}^\star/\Gamma$ beliebig, mit $R = |z|$. Definiere

$$U_k = \{w \in \mathbb{C}^\star \mid R\,r^{k-1/2} < |w| < R\,r^{k+1/2}\}, \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad U = \pi(U_k).$$

Diese U_k sind offensichtlich paarweise disjunkt offene Mengen. Wegen $|\xi| = r > 1$ ist $\xi U_k = U_{k+1}$, also sind alle U_k zueinander isomorph. Weiter ist $\pi|_{U_k}$ injektiv, da $\left|\frac{w}{w'}\right| < 1$ für alle $w, w' \in U_k$ gilt. Damit ist leicht einzusehen, dass $\pi|_{U_k} : U_k \to U$ ein Homöomorphismus ist und dass gilt

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} U_k.$$

Also ist U offen, und das Urbild unter π besteht aus disjunkten Mengen, die durch π homöomorph zu U sind. Somit ist π lokal trivial. □

[1] $\mathbb{C}^\star/\Gamma$ ist hier als Quotient von Gruppen zu verstehen, *nicht* als Zusammenschlagen der Menge Γ.

Behauptung 3. $\mathbb{C}^\star/\Gamma$ *ist homöomorph zum Torus* $S^1 \times S^1$.

Beweis. Wir beginnen damit, eine Spirale zu beschreiben, die alle Punkte von Γ enthält:

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\star, \;\; t \mapsto \exp(t \, \log \xi)$$

Wenn wir $\xi = r \, e^{i \, \vartheta}$ in Polarkoordinaten schreiben, wäre z.B. $\log \xi = \log r + i \, \vartheta$. γ ist offensichtlich eine stetige Abbildung und es gilt für $n \in \mathbb{Z} : \gamma(n) = \xi^n$.

Definieren wir nun

$$f : \mathbb{R} \times S^1 \to \mathbb{C}^\star, \;\; (t, s) \mapsto \gamma(t) \cdot s.$$

Mit der Beziehung $|\gamma(t)| = \exp(t \, \log r)$ und $r \neq 1$ lässt sich schnell einsehen, dass f surjektiv und stetig ist. f ist sogar ein Gruppenhomomorphismus. Setzen wir weiter $g := \pi \circ g$. Dies bleibt ein surjektiver, stetiger Gruppenhomomorphismus, dessen Kern wir berechnen können:

$$\begin{aligned} g(t,s) = 1 \iff f(t,s) \in \Gamma \iff \exists n \in \mathbb{Z} : f(t,s) = \xi^n \\ \implies \exp(t \, \log r) = |\gamma(t)| = r^n \implies t = n \implies \gamma(t) = \xi^n \implies s = 1 \end{aligned}$$

So $\ker g = \mathbb{Z} \times \{1\}$. Damit lässt sich g unter $p : \mathbb{R} \times S^1 \to S^1 \times S^1$ injektiv und stetig zu φ faktorisieren.[2]

φ ist dann bijektiv und stetig. Weiter ist $\mathbb{C}^\star$ Hausdorff, also Γ abgeschlossen (Aufgabe 8 auf Blatt 8&9)und damit auch $\mathbb{C}^\star/\Gamma$ Hausdorff (siehe Vorlesung). Da $S^1 \times S^1$ kompakt ist, folgt mit dem wichtigen Satz, dass φ ein Homöomorphismus ist. □

Aufgabe 2

Bemerkung 1. Für eine schöne Umgebung $U \subset X$ und eine offene Umgebung $U' \subset X$ mit $U' \subset U$ ist auch U' noch eine schöne Umgebung.

Behauptung 4. *Sei* $\pi : Y \to X$ *eine Überlagerung. Dann gilt:*
Y *kompakt* $\iff$ X *kompakt und* π *ist endlich (d.h. alle Fasern sind endlich).*

Beweis. [⇒] π ist nach Voraussetzung surjektiv und stetig, also $X = \pi(Y)$ ist Bild eines Kompaktums, damit kompakt.

Ferner haben wir für jedes $x \in X$ eine gute Umgebung U_x, über der π lokal trivial ist. Alle diese U_x überdecken natürlich X, aber dank Kompaktheit reichen schon $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Nun zerfällt

$$\pi^{-1}(U_{x_i}) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_i} U_{x_i}^\lambda$$

disjunkt in die (offenen) Blätter. Alle zusammen bilden natürlich eine Überdeckung von Y:

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{\lambda \in \Lambda_i} U_{x_i}^\lambda$$

Da Y kompakt, wird Y schon durch endlich viele dieser $U_{x_i}^\lambda$ überdeckt, ebenso wie jedes $\pi^{-1}(U_{x_i})$! Damit muss jedes Λ_i endlich sein (die Blätter sind schließlich disjunkt, also wird jedes benötigt) und folglich sind alle Fasern endlich.

[2] Im Allgemeinen gilt für topologische Räume *nicht*, dass $X_1/\sim_1 \times X_2/\sim_2$ und $(X_1 \times X_2)/\sim_1\times\sim_2$ homöomorph sind. Aber wenn z.B. das Produkt der Quotienten Hausdorff ist und der Quotient des Produkts kompakt (wie hier der Fall), sind beide doch homöomorph.

[⇐] Sei $\bigcup_{i\in I} V_i = Y$ eine offene Überdeckung. Wir definieren

$$\mathcal{F} = \left\{ U \subset X \text{ offen} \;\middle|\; \exists E \subset I \text{ endlich mit } \pi^{-1}(U) \subset \bigcup_{i\in E} V_i \right\}$$

Wir werden gleich zeigen, dass $\bigcup_{U\in\mathcal{F}} U = X$ eine offene Überdeckung von X liefert. Da X kompakt, gibt es eine offene Teilüberdeckung, nämlich $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{F}$ mit

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} U_n \implies Y = \pi^{-1}(X) = \bigcup_{j=1}^{n} \pi^{-1}(U_n) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{i\in E_j} V_i$$

Dabei sind die E_j je endlich, wir haben also eine endliche Teilüberdeckung der V_i.

Es bleibt zu zeigen, dass die Mengen in $\mathcal{F}$ wirklich X überdecken. Dazu sei $x \in X$ beliebig. Nach Voraussetzung sind die Fasern endlich, so notiere $\pi^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_m\} \subset Y$. Die V_i überdecken Y, also gibt es $y_1 \in V_{i_1}, \dots, y_m \in V_{i_m}$. Sei nun U' eine schöne Umgebung von x.

$$U := \bigcap_{k=1}^{m} \pi(V_{i_k}), \quad \tilde{U} = U \cap U'$$

$\tilde{U}$ ist noch eine schöne Umgebung, zerfällt also disjunkt in Blätter, die via π homöomorph zu $\tilde{U}$ sind.

$$\pi^{-1}(\tilde{U}) = W_1 \cup \dots \cup W_m, \quad y_k \in W_k, \qquad \tilde{\tilde{U}} := \bigcap_{k=1}^{m} \pi(W_k \cap V_{i_k})$$

Da die W_k bereits Blätter waren, ergibt sich nun folgende Situation:

$$\pi^{-1}(\tilde{\tilde{U}}) = \tilde{W}_1 \cup \dots \cup \tilde{W}_m, \quad \tilde{W}_k = W_k \cap V_{i_k} \ni y_k$$

Damit gilt immer noch $x \in \tilde{\tilde{U}}$ und offensichtlich ist $\tilde{\tilde{U}} \in \mathcal{F}$. □

Aufgabe 3

Sei $f : Y \to X$ ein surjektiver lokaler Homöomorphismus.

Behauptung 5. *Jede Faser von f ist diskret.*

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig. Sei $y \in f^{-1}(x)$ ein Punkt der Faser. Da f lokaler Homöomorphismus, so gibt es $U \subset Y$ offene Umgebung von y, so dass $f|_U : U \to f(U)$ ein Homöomorphismus ist, also insbesondere bijektiv. Damit ist $\{y\} = f|_U{}^{-1}(x) = f^{-1}(x) \cap U$. So $\{y\}$ ist offen in der Faser. Da die einelementigen Teilmenge eine Basis der diskreten Topologie bilden, tragen damit alle Fasern die diskrete Topologie. □

Proposition 6. *Sei Y ein Hausdorff-Raum. Seien $y_1, \dots, y_n$ verschiedene Punkte aus Y. Dann gibt es offene Umgebungen $y_1 \in U_1, \dots, y_n \in U_n$, die paarweise disjunkt sind.*

Beweis durch Induktion. Die Verankerung mit $n = 1$ ist trivial.

Für den Induktionsschritt seien $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n$ paarweise disjunkt und offen bereits gegeben. Da Y Hausdorff, so gibt es für $i = 1, \dots, n$ je $y_i \in V_i, y_{n+1} \in W_i$ offen mit $V_i \cap W_i = \emptyset$. Setze nun

$$U_i = \tilde{U}_i \cap V_i, \quad i = 1, \dots, n, \qquad U_{n+1} = \bigcap_{i=1}^{n} W_i$$

Diese U_i sind offensichtlich offen und paarweise disjunkt. □

Behauptung 7. *Ist Y Hausdorff, und haben alle Fasern die gleiche (endliche) Kardinalität $n \in \mathbb{N}$, so ist f eine Überlagerung.*

Bemerkung 2. Für ein U offen mit $f(U)$ offen und $f|_U : U \to f(U)$ Homöomorphismus sowie $U' \subset Y$ offen mit $U' \subset U$ ist auch $f(U')$ offen und $f|_{U'} : U' \to f(U')$ ein Homöomorphismus.

Beweis. f stetig und surjektiv ist klar gegeben. Die vorige Behauptung sagt, dass die Fasern allesamt diskret sind. Man muss nur noch die lokale Trivialität zeigen.

Sei $x \in X$. Seien $\{y_1, \dots, y_n\} = f^{-1}(x)$ die Elemente der Fasern. Seien $y_1 \in U_1, \dots, y_n \in U_n$ wie in Proposition 6. Seien ferner $y_1 \in V_1, \dots, y_n \in V_n$ offen mit $f(V_i)$ offen und $f|_{V_i} : V_i \to f(V_i)$ Homöomorphismus. Setze $\tilde{W}_i := U_i \cap V_i$ und $U := \bigcap_{i=1}^n f(\tilde{W}_i)$. Klar ist U offene Umgebung von x.

$$W_i := f^{-1}(U) \cap \tilde{W}_i \implies f^{-1}(U) \supset \bigcup_{i=1}^n W_i$$

Die W_i sind natürlich offen und auch noch paarweise disjunkt. Da $U \subset f(\tilde{W}_i)$ gilt sogar $f(W_i) = U$, und da $W_i \subset V_i$ ist $f|_{W_i} : W_i \to U$ noch ein Homöomorphismus.

Nun zeigen wir noch, dass das $\supset$ sogar ein $=$ ist: Sei $x' \in U$. Jedes $f|_{W_i} : W_i \to U$ ist bijektiv, also haben wir $\{y_i'\} = W_i \cap f^{-1}(x')$. Diese y_i' sind aber alle verschieden, da die W_i paarweise disjunkt sind. Da aber nach Voraussetzung $\# f^{-1}(x') = n$, so gilt $f^{-1}(x') = \bigcup_{i=1}^n W_i \cap f^{-1}(x')$. □

Bemerkung 3. Die Annahmen, dass die Kardinalität der Fasern überall gleich und auch endlich ist, sind unbedingt notwendig. Als Gegenbeispiel betrachte man z.B. $X = \mathbb{R}$ und $Y = \mathbb{R} \times \{1\} \cup]-1,1[\times \{0\}$ bzw. $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{N} \cup]-1,1[\times \{0\}$ für unendliche Fasern, jeweils mit induzierter Topologie von $\mathbb{R}^2$ und für π die Standardprojektion der ersten Koordinate.

Man sieht leicht ein, dass π ein surjektiver lokaler Homöomorphismus ist; ebenso ist offensichtlich die Kardinalität der Fasern nicht lokal konstant – also kann es sich nicht um eine Überlagerung handeln.

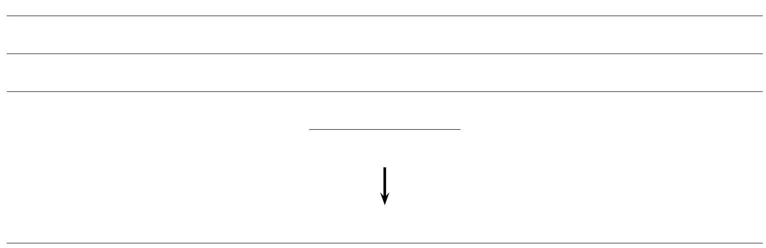

Abbildung 2: Beispiel eines lokalen Homöomorphismus, der zwar surjektiv ist, aber dennoch keine Überlagerung.

Es gibt auch Beispiele, die Notwendigkeit der Hausdorff-Eigenschaft für Y beweisen.

Aufgabe 4

Behauptung 8. *Seien $g : Z \to Y$ und $f : Y \to X$ lokale Homöomorphismen. Dann ist auch $f \circ g : Z \to X$ ein lokaler Homöomorphismus.*

Beweis. Zu zeigen ist: $\forall z \in Z : \exists U \subset Z$ offen : $f \circ g(U) \subset X$ offen und $(f \circ g)|_U : U \to f \circ g(U)$ ist ein Homöomorphismus.

Sei also $z \in Z$ beliebig. Da g lokaler Homöomorphismus, $\exists U \subset Z$ offen mit $g(U) \subset Y$ offen und $g|_U : U \to g(U)$ Homöomorphismus. Setze $y := g(z)$. Da f lokaler Homöomorphismus, $\exists V \subset Y$ offen mit $f(V) \subset X$ offen und $f|_V : V \to f(V)$ Homöomorphismus.

Setze $W = U \cap g^{-1}(V)$, klar offen in Z und auch U, somit $g(W)$ offen in $g(U)$ und auch in Y. Weiter $g(W) \subset V$, so nach Bemerkung 2 ist $f(g(W))$ offen in X und $f|_{g(W)} : g(W) \to f(g(W))$ ein Homöomorphismus. Also ist $(f \circ g)|_w = f|_{g(W)} \circ g|_W : W \to f \circ g(W)$ auch ein Homöomorphismus. ☐

Aufgabe 5

Behauptung 9. *Seien $g : Z \to Y$ und $f : Y \to X$ Überlagerungen mit f endlich. Dann ist auch $f \circ g : Z \to X$ eine Überlagerung.*

Beweis. Da f und g stetig und surjektiv sind, ist klar auch $f \circ g$ stetig und surjektiv. Wir zeigen nun, dass $f \circ g$ lokal trivial ist und dabei auch, dass die Fasern diskret sind.

Sei $x \in X$ beliebig. Seien $\{y_1, \ldots, y_n\} = f^{-1}(x)$ die Punkte der Faser. Sei $x \in U \subset X$ eine schöne Umgebung für f. Also kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U) \arrow[r, "\sim \varphi"] \arrow[dr, "f|_{f^{-1}(U)}"'] & U \times F \arrow[d, "p_U"] \\ & U \end{tikzcd}$$

wobei $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ ein endlicher diskreter Raum ist. Seien $y_i \in U_i = \varphi^{-1}(U \times \{f_i\})$ die Blätter. Nach Bemerkung 1 enthält jedes U_i eine für g schöne Umgebung V_i. Setze nun

$$\tilde{U} = \bigcap_{i=1}^{n} f(V_i), \qquad W_i = V_i \cap f^{-1}(\tilde{U}) \implies f^{-1}(\tilde{U}) = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$$

Die W_i sind paarweise disjunkt – also sind auch die $g^{-1}(W_i)$ paarweise disjunkt – und immer noch schöne Umgebungen für g, d.h. man hat jeweils ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} g^{-1}(W_i) \arrow[r, "\sim \psi_i"] \arrow[dr, "g|_{g^{-1}(W_i)}"'] & W_i \times G_i \arrow[d, "p_{W_i}"] \\ & W_i \end{tikzcd}$$

wobei die G_i diskrete Räume sind. Mit $g^{-1}(f^{-1}(\tilde{U}) = \bigcap_{i=1}^{n} g^{-1}(W_i)$ und $W_i \simeq \tilde{U}$ baut man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} g^{-1}(f^{-1}(\tilde{U})) \arrow[r, "\sim \coprod \psi_i"] \arrow[d, "g"] & \coprod_{i=1}^{n} W_i \times G_i \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "p_W"] & \tilde{U} \times \coprod_{i=1}^{n} G_i \arrow[d, "p"] \\ f^{-1}(\tilde{U}) \arrow[r, equal] & \bigcup_{i=1}^{n} W_i \arrow[r, "\sim\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & \tilde{U} \times F \arrow[d, "p_{\tilde{U}}"] \\ & & \tilde{U} \end{tikzcd}$$

Das linke Viereck kommutiert, da das obige Dreieck mit W_i kommutiert. Das untere Dreieck ist eine Einschränkung des obigen Dreiecks mit U. Die Faser $(f \circ g)^{-1}(x)$ ist homöomorph zu $\coprod_{i=1}^{n} G_i$, welches als Summe von diskreten Räumen ebenfalls diskret ist. ☐