Aufgabe 3

Seien X, Y homotopieäquivalente topologische Räume. Sei die Homotopieäquivalenz durch $f : X \to Y, g : Y \to X$ mit $f \circ g \sim_H \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$ gegeben.

Behauptung 1. *X wegzusammenhängend $\implies$ Y wegzusammenhängend.*

Beweis. Seien $y, y' \in Y$. Setze $x := g(y), x' := g(y')$. Da X wegzsh., gibt es einen Weg $\gamma : x \rightsquigarrow x'$. Setze $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma : [0,1] \to Y$. Dies ist ein Weg $\tilde{\gamma} : f(x) = f(g(y)) \rightsquigarrow f(x') = f(g(y'))$.

Weiter ist $H : Y \times I \to Y$ Homotopie zwischen $H_0 = \mathrm{id}_Y$ und $H_1 = f \circ g$. Das gibt Wege

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to Y, & \beta : I &\to Y \\ t &\mapsto H_t(y) & t &\mapsto H_t(y') \\ \alpha : y &\rightsquigarrow f(g(y)) & \beta : y' &\rightsquigarrow f(g(y')) \end{aligned}$$

und mit der Wegverknüpfung erhält man einen Weg $\alpha \star \gamma \star \beta^{-1} : y \rightsquigarrow y'$. □

Um die analoge Behauptung für die schwächere Eigenschaft *zusammenhängend* zu beweisen, braucht man erst eine andere Charakterisierung.[1]

Behauptung 2. *X zusammenhängend $\iff$ $\forall D$ diskret, $\forall \phi : X \to D$ stetig ist ϕ konstant.*

Beweis. [$\Rightarrow$] Sei $d \in D$ beliebig $\implies$ $\{d\}$ offen und abgeschlossen in D. ϕ stetig $\implies$ $\phi^{-1}(\{d\})$ offen und abgeschlossen in X. X zusammenhängend $\implies$ $\phi^{-1}(\{d\}) = \emptyset$ oder $\phi^{-1}(\{d\}) = X$. Also ist ϕ konstant.
[$\Leftarrow$] Sei $X = U \cup V$ mit U, V offen in X, $U \cap V = \emptyset$. Sei $D = \{a, b\}$ mit der diskreten Topologie versehen. Definiere

$$\begin{aligned} \phi : X &\to D \\ x &\mapsto \begin{cases} a & x \in U \\ b & x \in V \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist klar wohldefiniert und stetig, da $\phi^{-1}(a) = U$ und $\phi^{-1}(b) = V$ nach Voraussetzung offen in X sind. Nun muss aber ϕ konstant sein, d.h. entweder $U = \phi^{-1}(a) = X$ oder $V = \phi^{-1}(b) = X$. Also ist X zusammenhängend. □

[1] Diese illustriert auch, dass zusammenhängend und wegzusammenhängend in gewissem Sinne eher duale Begriffe sind.

Behauptung 3. *X zusammenhängend $\implies$ Y zusammenhängend.*

Beweis. Sei D diskret, $\varphi : Y \to D$ stetig. Setze $\tilde{\varphi} = \varphi \circ f : X \to D$. Klar ist $\tilde{\varphi}$ stetig. Da X zusammenhängend, ist $\tilde{\varphi}$ konstant. Definiere $\tilde{\tilde{\varphi}} = \tilde{\varphi} \circ g = \varphi \circ (f \circ g) : Y \to D$. Diese Abbildung ist dann natürlich auch konstant.

Nun ist $\tilde{\tilde{\varphi}} \sim \varphi$ via $\tilde{H} = \varphi \circ H : Y \times [0,1] \to D$ stetig. Betrachte für jedes $y \in Y$ die stetigen Einschränkungen $\tilde{H}_y : [0,1] \to D$. Da D diskret und $[0,1]$ zusammenhängend, ist $\tilde{H}_y$ konstant.

Da aber auch $\tilde{H}_0 = \tilde{\tilde{\varphi}}$ konstant ist, ist ganz $\tilde{H}$ konstant und folglich auch $\varphi = \tilde{H}_1$. Also ist Y zusammenhängend. $\square$