

Aufgabe 1

Behauptung. Seien A und B Aussagen. Dann gilt stets

$$A \iff (A \vee (A \wedge \neg B)). \tag{*}$$

Beweis. Berechnen wir die Wahrheitstabelle:

| A | B | $\neg B$ | $A \wedge \neg B$ | $A \vee (A \wedge \neg B)$ | $A \iff (A \vee (A \wedge \neg B))$ |
|---------|---------|----------|-------------------|----------------------------|-------------------------------------|
| \top | \top | \perp | \perp | \top | \top |
| \top | \perp | \top | \top | \top | \top |
| \perp | \top | \perp | \perp | \perp | \top |
| \perp | \perp | \top | \perp | \perp | \top |

Die Tabelle zeigt uns, dass für alle Belegungen von A und B sowohl A als auch $A \vee (A \wedge \neg B)$ stets dieselben Wahrheitswerte haben. Damit sind diese beiden äquivalent und es gilt (*). \square

Aufgabe 2

Behauptung. Seien A und B wieder Aussagen. Dann gelten

$$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B, \tag{a)}$$

$$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B. \tag{b)}$$

Beweis. Wieder berechnen wir die Wahrheitstabelle(n):

| A | B | $A \wedge B$ | $\neg(A \wedge B)$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \vee \neg B$ |
|---------|---------|--------------|--------------------|----------|----------|----------------------|
| \top | \top | \top | \perp | \perp | \perp | \perp |
| \top | \perp | \perp | \top | \perp | \top | \top |
| \perp | \top | \perp | \top | \top | \perp | \top |
| \perp | \perp | \perp | \top | \top | \top | \top |

Durch Vergleichen der Spalten für $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ sieht man, dass (a) immer gilt.

| A | B | $A \vee B$ | $\neg(A \vee B)$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \wedge \neg B$ |
|---------|---------|------------|------------------|----------|----------|------------------------|
| \top | \top | \top | \perp | \perp | \perp | \perp |
| \top | \perp | \top | \perp | \perp | \top | \perp |
| \perp | \top | \top | \perp | \top | \perp | \perp |
| \perp | \perp | \perp | \top | \top | \top | \top |

Ebenso vergleicht man die Spalten für $\neg(A \vee B)$ und $\neg A \wedge \neg B$ und folgert (b). \square