Hinweise

Aufgabe 1

Koordinatentransformation $x = \frac{1}{y}$. Bemerke $\log x = -\log y$. Aus der Vorlesung

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\log y}{y} = 0$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Mache Restgliedabschätzung ähnlich wie bei exp. Argumentieren mit "$\frac{\infty}{\infty}$" ist strengstens verboten!

Aufgabe 2

Schreibe $\exp_a = \exp \circ \tau_a$ mit geeigneter Funktion τ_a. Dann zeige

- exp streng monoton steigend durch $x > 0 \iff \exp(x) > 1$ (für $x \in \mathbb{R}$) und Additionstheorem.
- τ_a streng monoton steigend bzw. fallend, je nach Vorzeichen von $\log a$–dies muss mit $a > 1$ und $0 < a < 1$ in Verbindung gebracht werden.
- Die Komposition $\exp_a$ ist monoton steigend bzw. fallend.

Das Bild $\exp_a(\mathbb{R})$ findet man mit ähnlicher Strategie.

Für die Stetigkeit der Umkehrfunktion nutzt man einen Satz aus der Vorlesung. Die Formel für $\log_a(x)$ findet man, indem man den Ansatz $x = \exp_a(y)$ macht und nach y auflöst.

Aufgabe 3

$$\frac{1}{x + i\,y} = \frac{1}{x + i\,y} \, \frac{x - i\,y}{x - i\,y} = \frac{1}{x^2 + y^2} \, (x - i\,y)$$

oder

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \, \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{1}{|z|^2} \, \overline{z}$$

Dies liefert auch:

$$|z| = 1 \implies \frac{1}{z} = \overline{z}$$

$$z + \overline{z} = (x + i\,y) + (x - i\,y) = 2\,x = 2 \, \mathsf{Re}\, z$$
$$z - \overline{z} = (x + i\,y) - (x - i\,y) = 2\,i\,y = 2\,i \, \mathsf{Im}\, z$$

Zum Betrag in $\mathbb{C}$: $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$ und $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (falls noch nicht in Vorlesung bewiesen–beweisen!) Weiter $\mathsf{Re}\, z \le |z|$ zeigen, das hilft dann bei der Dreiecksungleichung.

Additionstheoreme für Cosinus und Sinus

$$\cos(x + y) = \cos x \, \cos y - \sin x \, \sin y$$
$$\sin(x + y) = \cos x \, \sin y + \sin x \, \cos y$$

Zum Beweis: nutze $\exp(i\,x) = \cos x + i\,\sin x$, Additionstheorem für exp und komplexe Multiplikationsformel.

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = \dots$$

führt man zurück auf die Additionstheoreme mittels

$$u := \frac{x+y}{2} \qquad v := \frac{x-y}{2}$$
$$\implies u + v = x \qquad u - v = y$$

Aufgabe 4

Erinnere Definition von $\frac{\pi}{2}$ als Nullstelle von cos im Intervall $[0, 2]$. Weiter zeige, dass $\sin^2 x + \cos^2 x = \exp(i\,x)\,\overline{\exp(i\,x)} = 1$ (für $x \in \mathbb{R}$). Das gibt schon (fast) den Wert von $e^{i\,\pi/2}$. Die anderen kann man als Potenzen davon schreiben.

Für (b) wende die Additionstheoreme an und benutze die Werte von cos und sin bei $\frac{\pi}{2}, \dots$ aus (a).

Aufgabe 5

Zeige zuerst:

$$\max(|a_n|_{\mathbb{R}}\,, |b_n|_{\mathbb{R}}) \leq |a_n + i\,b_n|_{\mathbb{C}} \leq |a_n|_{\mathbb{R}} + |b_n|_{\mathbb{R}}$$

Dann zeige jeweils mit $\varepsilon - N$ Definition der Konvergenz:

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent in $\mathbb{R} \implies (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent in $\mathbb{C}$.
- $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent in $\mathbb{C} \implies (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 6

Zeige zuerst, $|w_k| = 1$ (siehe Tipps A4).

Bemerke $w_{k+1} = w_k \cdot w_1$. $w_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ hilft bei Berechnung von $|w_{k+1} - w_k|$. Auf $2 \sin \frac{\pi}{n}$ kommt mit einer der Formeln aus A3.

Für (b) verwende A1b mit einer Folge $x_n \longrightarrow 0$.