Aufgabe 6

Zu zeigen ist $\cos : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton fallend. In der Vorlesung wurde das bereits für das Intervall $[0,2]$ gemacht, mit Formeln von B9A3c.

Ähnlich kann man hier gehen: man muss aber noch überlegen, warum $\sin(x) > 0$ für $x \in]0,\pi[$. Wegen $\frac{\pi}{2} \in]0,2]$ weiß man schon (aus der Vorlesung), dass es für $x \in]0,\frac{\pi}{2}]$ erfüllt ist. Für $x \in [\frac{\pi}{2},\pi[$ kommt man vielleicht mit den Formeln von B9A4b weiter.

Nicht viel anders zeigt man $\sin : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Dazu muss man überlegen, dass $\cos(x) > 0$ für $x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ gilt. Mit Hilfe von (a) ist das recht einfach.

Für $\tan :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ hat man keine Formel in B9A3c, aber man kann trotzdem

$$\tan(x) - \tan(y) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\sin(y)}{\cos(y)}$$

betrachten und ähnliche Argumente wie in (a) und (b) verwenden.

Jedenfalls geht es auch ohne Mittelwertsatz, der einem sowieso höchstens die Hälfte der Arbeit machen würde—denn $\sin(x) > 0$ für $x \in]0,\pi[$ etc würde man ebenso beweisen müssen.

Hat man die Monotonie gezeigt, findet man mit Satz 3.11 (oder direkt mit dem Zwischenwertsatz), dass die gesuchten Bilder

$$\cos([0,\pi]) \qquad \sin\left(\left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right]\right) \qquad \tan\left(\left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[\right)$$

Intervalle sind—es reicht also, die Grenzen zu finden.