Aufgabe 1

Sei $a_n = \frac{1}{n^2+n}$. **z.z.**$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy Folge.
Sei $\varepsilon > 0$. Seien $m \geq n \geq N$. Dann

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n^2+n} - \frac{1}{m^2+m}\right| &= \frac{1}{n^2+n} - \frac{1}{m^2+m} = \frac{m^2+m-(n^2+n)}{(n^2+n)(m^2+m)}\\ &\leq \frac{m^2+m}{(n^2+n)(m^2+m)} = \frac{1}{\underbrace{n^2+n}_{\geq n}} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon\end{aligned}$$

für $N > 1/\varepsilon$.

z.z. Die unendliche Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\,(k+1)}$ konvergiert.
Nutzen wir Blatt 1, Aufgabe 3 und Korollar 2.4:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$$

Aufgabe 2

Sei $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$ für alle $n \geq 1$.
z.z.$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
Idee: Quadratische Ergänzung und 3. binomische Formel: $n^2 + n + \frac{1}{4} = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$

$$\sqrt{n^2+n} - \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(n^2+n) - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2+n} + n + \frac{1}{2}} = \frac{-1/4}{\sqrt{n^2+n} + n + 1/2}$$

Nehmen wir den Betrag, und nutzen wir $n = \sqrt{n^2} \leq \sqrt{n^2+n} \leq (n+1/2)$, so folgt

$$\left|\sqrt{n^2+n} - n - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1/4}{2\,n + 1/2}$$

Da die rechte Seite eine Nullfolge ist, muss es auch die linke Seite sein (Satz 2.6). So es folgt

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert mit } \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 6

Satz. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent $\iff$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und hat genau einen Häufungspunkt.*

Beweis. [$\Rightarrow$]Satz 2.1 besagt: konvergent $\implies$ beschränkt.
Weiter sei a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. So es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = a$. Aber wegen einer Bemerkung aus der Vorlesung gilt

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = a,$$

so $\lim_{n\to+\infty} a_n$ ist der einzige Häufungspunkt.
[$\Leftarrow$]Wir nehmen an: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent, d.h.

$$\begin{aligned} &\neg\big(\exists a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon\big) \\ \Leftrightarrow\ &\forall a \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N : |a_n - a| \geq \varepsilon \end{aligned}$$

Sei nun a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mit obiger Annahme gibt es dann $\varepsilon > 0$, so dass gilt

$$\forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N : |a_n - a| \geq \varepsilon,$$

so wir können eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ finden, mit $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon\ \forall k \in \mathbb{N}$.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\implies$ $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\overset{\text{Bolz.Weier.}}{\implies}$ $\exists$ HP $\tilde{a}$ von a_{n_k} $\implies$ $\tilde{a}$ HP von a_n $\implies$ $a = \tilde{a}$. Da $\tilde{a}$ HP von a_{n_k}, gibt es für $\varepsilon/2 > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_K} - \tilde{a}| < \varepsilon/2$. Aber

$$\varepsilon \leq |a_{n_K} - a| = |a_{n_K} - \tilde{a}| < \varepsilon/2 \quad \textbf{W!}$$

□