Lemma 1. *Seien $a < c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b < c$.*

Beweis. Zu $c - a > 0$ liefert das archimedische Axiom $n \in \mathbb{N}$ mit $n\,(c-a) > 1$. Dann können wir ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $n\,a < m < n\,b$ finden—man nehme z.B. das kleinste $m \in \mathbb{Z}$ mit $n\,a < m$. $b = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ erfüllt dann $a < b < c$. □

Definition 1. Ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit

$$\forall m \in \mathbb{N}: \; n \,|\, m^2 \implies n \,|\, m$$

wollen wir hier *angenehm*[1] nennen.

Beispiel. Aus Blatt 1, Aufgabe 5 wissen wir, dass 2 angenehm ist.

Behauptung 1. 3 *ist angenehm.*

Beweis. Wir führen einen indirekten Beweis durch. Sei $m \in \mathbb{N}$. Nun $3 \nmid m$ heißt, dass bei der Division mit Rest $m = 3\,q + r$ entweder $r = 1$ oder $r = 2$ gilt.

$$m^2 = (3\,q+1)^2 = 9\,q^2 + 6\,q + 1 = 3\,\left(3\,q^2 + 2\,q\right) + 1$$
$$m^2 = (3\,q+2)^2 = 9\,q^2 + 12\,q + 4 = 3\,\left(3\,q^2 + 4\,q + 1\right) + 1$$

So in beiden Fällen gilt offensichtlich $3 \nmid m^2$. □

Behauptung 2. *Wenn $n \in \mathbb{N}$ angenehm ist, so gibt es kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = n$.*

Beweis. Wir beweisen durch Widerspruch: Sei $x \in \mathbb{Q}$ doch mit $x^2 = n$. Schreiben wir $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, da wir o.B.d.A. $x > 0$ nehmen können. Weiter können wir p und q teilerfremd annehmen—andernfalls kürzen wir einfach mit dem ggT. Nun

$$x^2 = n \implies \left(\frac{p}{q}\right)^2 = n \implies p^2 = n\,q^2.$$

So offensichtlich gilt $n \,|\, p^2$. n angenehm $\implies n \,|\, p$, d.h. $p = n\,p'$ mit $p' \in \mathbb{N}$. Also

$$\left(n\,p'\right)^2 = p^2 = n\,q^2 \implies n\,p'^2 = q^2 \implies n \,|\, q^2$$

n angenehm $\implies n \,|\, q$. So n ist gemeinsamer Teiler von p und q. **W!** □

[1] Diese Bezeichnung ist überhaupt *nicht Standard*!

Behauptung 3. *Sei* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*. Sei* s *das Supremum von*

$$A := \left\{ x \in \mathbb{Q} : x^2 < n \right\}.$$

Dann gilt $s^2 = n$*.*

Beweis. Wir nutzen die Trichotomie $(s^2 < n) \vee (s^2 = n) \vee (s^2 > n)$.
Sei zuerst $s^2 < n$.
Gesucht ist $h > 0$ so, dass $s + h \in A$, d.h. $s + h \in \mathbb{Q}$ und

$$(s+h)^2 < n \iff s^2 + 2\,s\,h + h^2 < n \iff 2\,s\,h + h^2 < n - s^2.$$

Denken wir o.B.d.A. $h < 1$, so reicht es wegen $h^2 < h$ schon, $(2\,s{+}1)\,h = 2\,s\,h{+}h < n{-}s^2$ zu haben. Sozusagen

$$h < \hat{h} = \min\left(\frac{n - s^2}{2\,s + 1}, 1 \right).$$

$\frac{1}{2} \in A \implies s > 0$, damit $n - s^2 > 0 \implies \hat{h} > 0$. Mit Lemma 1 finden wir $s + h \in \mathbb{Q}$ mit $s < s + h < s + \hat{h}$ und wegen $h < \hat{h}$ auch $(s+h)^2 < n$. Also ist s *keine* obere Schranke von A. **W!**

Sei nun $s^2 > n$.
Betrachten wir

$$s' = s - \frac{s^2 - n}{2\,s} < s.$$

$$2\,s^2 > s^2 > s^2 - n \implies s > \frac{s^2 - n}{2\,s} \implies s' > 0.$$

Wir finden

$$s'^2 = s^2 - 2\,s\,\frac{s^2 - n}{2\,s} + \left(\frac{s^2 - n}{2\,s}\right)^2 = s^2 + n - s^2 + \left(\frac{s^2 - n}{2\,s}\right)^2 \geq n$$

da Quadrate ja stets ≥ 0 sind.
So für $x \in A$ gilt entweder $x \leq 0 < s'$ oder $(x > 0) \wedge (x^2 < n \leq s'^2) \implies x < s'$. So s' ist ebenfalls obere Schranke von A, aber $s' < s$. **W!** zu s *kleinste* obere Schranke von A.

Damit kommt nur $s^2 = n$ in Frage. □

Bemerkung. Wenn n nun auch noch *angenehm* ist (z.B. $n = 2, 3, 5, 6$) so können wir mit Behauptung 2 folgern, dass das s aus Behauptung 3 eine irrationale Zahl sein muss, d.h. $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.