1 Folgen und Reihen

Eine *Folge* ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Gewöhnlich notiert man dies $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die einzelnen Folgenglieder notiert man mit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ oder $a_n, a_k, a_m, \ldots,$ wenn der gewünschte Index nicht als Zahl bekannt ist.

Man führt für Folgen dann die Begriffe von Konvergenz und bestimmter Divergenz ein. Für konvergente Folgen notiert man den Grenzwert als $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Ohne nach der Konvergenz einer Folge zu fragen, kann man daraus eine *Reihe* bauen: Diese notiert man $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Den Konvergenzbegriff erweitert man auf Reihen, indem man über die *Folge der Partialsummen* geht.

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} a_n \text{ für } N \in \mathbb{N}$$

Man sagt, die Reihe konvergiert (oder divergiert bestimmt), wenn das die Folge der Partialsummen tut. Den Grenzwert dieser Folge notiert man

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} S_N.$$

So die Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ liefert uns eigentlich zwei Folgen: Zum einen ganz normal $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, zum anderen die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Im Allgemeinen sind diese *nicht identisch*.

2 Konvergenzkriterien für Reihen

Cauchy-Kriterium Eine zur Konvergenz *äquivalente* Eigenschaft.

Nullfolgen-Kriterium Konvergiert die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, so muss $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein (wende Blatt 4, Aufgabe 5a auf die Folge der Partialsummen an). Dies ist nur ein *notwendiges* Kriterium, d.h. falls es erfüllt ist, kann man noch nicht auf die Konvergenz der Reihe schließen.

Ist es allerdings verletzt, so weiß man, dass die Reihe divergent sein muss.

Majoranten-Kriterium Dies ist eine *hinreichende* Bedingung für die (absolute) Konvergenz der Reihe. Wichtig ist dabei, dass die Majorante auch konvergent ist.

Minoranten-Kriterium Die Umkehrung des Majoranten-Kriteriums liefert eine *hinreichende* Bedingung für Divergenz. Es funktioniert aber nur, wenn $a_n \geq 0$ für alle $n \geq n_0$.

Quotienten-Kriterium Liefert eine Majorante in Form einer geometrischen Reihe für eine Reihe, die es erfüllt. Dies ist auch nur ein *hinreichendes* Kriterium für die (absolute) Konvergenz einer Reihe.

Wurzel-Kriterium Ebenso wie das Quotienten-Kriterium bekommt man eine geometrische Reihe als Majorante, also ist ein weiteres *hinreichendes* Kriterium für die (absolute) Konvergenz einer Reihe.

Leibniz-Kriterium Gilt $a_n = (-1)^n \tilde{a}_n$, wobei $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nichtnegative, monoton fallende Nullfolge ist, so konvergiert die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Dieses Kriterium ist *hinreichend* für die Konvergenz einer Reihe.