Aufgabe 6

Wir vereinbaren folgende Notation:
$f : (M, <) \longrightarrow (N, \prec)$ falls

$$\forall x, y \in M : \; x < y \implies f(x) \prec f(y)$$

d.h. f ist eine monotone Abbildungen zwischen geordneten Mengen.

Behauptung 1. $\cos : ([0, \pi], <) \longrightarrow (\mathbb{R}, >)$ *und* $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$

Beweis. Auf Blatt 9 hat man $\cos(x) = -\cos(\pi - x)$ gezeigt. Aus der Vorlesung ist ferner $\cos : ([0, \frac{\pi}{2}], <) \longrightarrow (\mathbb{R}, >)$ bekannt. Man bekommt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
([0, \frac{\pi}{2}], <) \arrow[r, "\cos"] & (\mathbb{R}, >) \arrow[d, "-x"] \\
([\frac{\pi}{2}, \pi], >) \arrow[u, "\pi - x"] \arrow[r, "\cos"'] & (\mathbb{R}, <)
\end{tikzcd}$$

Als Verknüpfung der oberen drei monotonen Abbildungen ist $\cos : ([\frac{\pi}{2}, \pi], >) \longrightarrow (\mathbb{R}, <)$ ebenfalls monoton, damit folgt $\cos : ([0, \pi], >) \longrightarrow (\mathbb{R}, <)$ strikt monoton fallend.
Da cos auch stetig ist, folgert man mit Satz 3.11, dass $\cos([0, \pi])$ ein Intervall ist. Da $\cos(0) = -1$ und $\cos(\pi) = 1$, gilt $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$. □

Behauptung 2. $\sin : ([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], <) \longrightarrow (\mathbb{R}, <)$ *und* $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$.

Beweis. Auf Blatt 9 wurde $\sin(x) = -\sin(-x) = -\cos(\frac{\pi}{2} - (-x)) = -\cos(\frac{\pi}{2} + x)$ gezeigt. Ähnlich wie im vorigen Beweis folgert man, indem man die vorige Behauptung verwendet:

$$\begin{tikzcd}
([0, \pi], <) \arrow[r, "\cos"] & (\mathbb{R}, >) \arrow[d, "-x"] \\
([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], <) \arrow[u, "\frac{\pi}{2} + x"] \arrow[r, "\sin"'] & (\mathbb{R}, <)
\end{tikzcd}$$

Die oberen drei monotonen Abbildungen liefern die Monotonie der unteren, die zu zeigen war.
Genau wie cos ist auch sin stetig, und Satz 3.11 liefert dann mit $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, dass $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$. □

Behauptung 3. $\tan : (]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,<) \longrightarrow (\mathbb{R},<)$ *und* $\tan(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$.

Beweis. Hier würde ein ähnlicher Beweis wie bei den vorigen Behauptungen auch funktionieren, zur Abwechslung gehen wir hier leicht anders:
Seien $x < y$ aus $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

$$\tan(y) - \tan(x) = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(y)\,\cos(x) - \sin(x)\,\cos(y)}{\cos(x)\,\cos(y)} = \frac{\sin(y-x)}{\cos(x)\,\cos(y)}$$

Wir verwenden hier eine Variation des Additionstheorems, ebenfalls auf Blatt 9. Nun ist nach Voraussetzung $y - x > 0$ und mit $|y-x| \leq |x| + |y| < 2\,\frac{\pi}{2} = \pi$ folgt $y - x \in]0,\pi[$. Da cos in $[0,\pi]$ strikt monoton fallend ist und $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, können wir für $t \in [0,\frac{\pi}{2}[$ folgern, dass $\cos(t) > 0$. Und wegen $\cos(t) = \cos(-t)$ gilt das sogar für $t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Mit $\sin(t) = \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t - \frac{\pi}{2})$ folgt dann $\sin(t) > 0$ für $t \in]0,\pi[$.
Also schließen wir, dass

$$\tan(y) - \tan(x) = \frac{\sin(y-x)}{\cos(x)\,\cos(y)} > 0$$

und somit tan strikt monoton steigend.
Ferner wissen wir

$$\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1, \qquad \lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0, \qquad \cos(x) \geq 0 \text{ für } x \in [0,\tfrac{\pi}{2}],$$

woraus wir

$$\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\downarrow-\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$$

schließen (da ja $\tan(-x) = -\tan(x)$). Zusammen mit der Stetigkeit von tan und Satz 3.11 folgt dann $\tan(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[) =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$. $\square$