Aufgabe 1

$f_1(x) = \frac{3x-1}{x+2}$ ist definiert für $x \neq -2$. Da Zähler und Nenner sind gemäß Vorlesung offensichtlich differenzierbar, ferner ist für $x \neq -2$ der Nenner $\neq 0$. Dann folgt mit der Quotientenregel, dass f_1 in $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ differenzierbar ist, mit

$$f_1'(x) = \frac{3\,(x+2) - (3\,x-1)\,1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}.$$

$f_2(x) = \sqrt{1+x^2}$ ist definiert für alle $x \in \mathbb{R}$, da stets $1 + x^2 > 0$ gilt. Da $y = 1 + x^2$ differenzierbar in $\mathbb{R}$ und $y \mapsto \sqrt{y}$ differenzierbar für $y > 0$, so folgt nach der Kettenregel, dass f_2 differenzierbar in $\mathbb{R}$ mit

$$f_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2\,x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$f_3(x) = \cos\left(\frac{2}{1+x^3}\right)$ ist definiert für $x \neq -1$, denn genau dann ist $y = 1+x^3 \neq 0$ (solange $x \in \mathbb{R}$). In diesem Bereich ist $y \mapsto \frac{2}{y}$ differenzierbar (siehe Vorlesung, Ableitung der allgemeinen Potenz), $1 + x^3$ ist natürlich überall differenzierbar, ebenso wie cos. Dann folgt mit zweimaligem Anwenden der Kettenregel, dass f_3 differenzierbar in $x \neq -1$ ist, mit

$$f_3'(x) = -\sin\left(\frac{2}{1+x^3}\right) \cdot \frac{-2}{(1+x^3)^2} \cdot 3\,x^2 = \sin\left(\frac{2}{1+x^3}\right) \frac{6\,x^2}{(1+x^3)^2}.$$

$f_4(x) = \arccos(x)$ ist als Umkehrfunktion des $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert für $x \in [-1, 1]$. Für $x \in]-1, 1[$ lässt sich Satz 4.4 anwenden, da dann $\cos'(x) = -\sin(x) \neq 0$. Dort ist also f_4 differenzierbar mit

$$f_4'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

da ja $\sin(y) = \sqrt{1-\cos^2(y)}$ für $y \in [0, \pi]$.

$f_5(x) = \exp(x)\,\sin(x^2)$ ist natürlich für $x \in \mathbb{R}$ definiert und also Produkt zweier differenzierbarer Funktionen ($\sin(x^2)$ ist nach der Kettenregel überall differenzierbar) ebenfalls differenzierbar. Die Ableitung errechnet sich mit der Produktregel als

$$f_5'(x) = \exp(x)\,\sin(x^2) + \exp(x)\,\cos(x^2)\,2\,x = \exp(x)\left(\sin(x^2) + \cos(x^2)\,2\,x\right).$$

$$f_6(x) = (x^x)^x = \exp\left(x\,\log\left(x^x\right)\right) = \exp\left(x\,\log\exp(x\,\log x)\right) = \exp\left(x^2\,\log x\right)$$

ist wegen $\log x$ nur definiert für $x > 0$, dort aber als Konstruktion aus differenzierbaren Funktionen auch differenzierbar (man benötigt mehrfach die Produkt- und Kettenregel). Die Ableitung lautet dann

$$f_6'(x) = \exp\left(x^2\,\log x\right)\left(2x \cdot \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) = (x^x)^x\,x\,(2\log x + 1).$$

$$f_7(x) = x^{(x^x)} = \exp\left(x^x \, \log x\right) = \exp\left(\exp(x \log x)\, \log x\right)$$

ist wie f_6 nur für $x > 0$ definiert und differenzierbar. Man berechnet die Ableitung als

$$\begin{aligned} &f_7'(x) = \\ &\exp\left(\exp(x \log x)\, \log x\right) \cdot \left(\exp(x \log x) \cdot \left(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot \log x + \exp(x \log x) \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &\qquad = x^{(x^x)} \cdot x^x \cdot \left((\log x + 1)\log x + \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Schließlich ist $f_8(x) = x\ |x|$ natürlich auf ganz $\mathbb{R}$ definiert — und dort auch differenzierbar!
Für $a > 0$ ist f_8 in einer Umgebung von a mit $x \mapsto x^2$ identisch, so $f_8'(a) = 2\,a = 2\ |a|$.
Für $a < 0$ ist f_8 in einer Umgebung von a mit $x \mapsto -x^2$ identisch, so $f_8'(a) = -2\,a = 2\ |a|$.
Für $a = 0$ betrachtet man den Differentialquotienten

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_8(0+h) - f_8(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\ |h|}{h} = \lim_{h \to 0} |h| = 0 = 2\ |0|$$

und findet, dass f_8 auch in 0 differenzierbar ist. Und $f_8'(x) = 2\ |x|$.